アーベル多様体のトーラス的退化(代数幾何とその近傍)

浪川, 幸彦

数理解析研究所講究録
273巻 1976年 206-219

アーベル多様体のトーラス的退化

名大 理　浪川幸彦

§0. 問題の設定

以下，すべての対象は複素被約解析空間の圏で考えられているものとする。

問題.　Sを解析空間，S^0をその稠密開集合で，$S-S^0$はSの解析的部分集合になっているものとする。

S^0上のg次元偏極アーベル多様体の族

$$\varpi^0 : \mathcal{A}^0 \longrightarrow S^0$$

が与えられた時，これをS上の族

$$\varpi : \mathcal{A} \longrightarrow S$$

に拡張して，これが「良い」性質を持つようにせよ。

「良い」という内容を数学的に厳密にすれば，その立場によっていろいろになり得るが，例えば次のようなことが考えられる。

1)　ϖは平坦(flat)，同次元的(equidimensional)；

2)　ϖは射影的，特にϖ^0上の偏極の族が拡張されれ

ば最も自然である；

3) Sが非特異の時，$\mathcal{A}$も非特異；

4) $\mathcal{A}$が非特異のとき，さらにその標準因子(canonical divisor)の形が具体的に分る；

5) $\mathfrak{A}^0$は切断(section)を持つとする（則ち，$\mathfrak{A}^0$は群多様体の族になる）。この時，その切断はS上のそれに拡張され，さらに$\mathcal{A}$はこれを0-切断とする群多様体の族$\mathcal{A}_0$を開集合としてふくみ，$\mathcal{A}_0$は$\mathcal{A}$に作用する；

6) 各ファイバーの形が具体的に分る，構造を分ればさらに良い。

上記の問題は$g=1$，$\dim S=1$の場合に小平教授によって深く研究され，楕円曲面論として美しい理論にまとめあげられて([2])，それは曲面論に於て重要な役割を果した。この場合，上記の諸性質を本質的に満たす拡張が存在する。我々はこれを多次元の場合に拡張して，それを一般分類理論に応用したいのである。しかし高次元の場合，曲面の極小モデルの理論がそのまゝは拡張されないので，標準的な拡張は存在しえず，むしろいろいろの拡張の可能性のあることが自然なのである。(しかしなお，曲線の場合の安定曲線(stable curve)に対応する，最も基本的な退化偏極アーベル多様体

の族が存在する。cf. §4 B), [7])

近年幾つかの結果が知られている([3], [5], [7], [9], [10])。ここでは，これらの大部分の諸結果を統一的にとらえうる一般的な族の構成法について述べる。そこでは最近発展したトーラス埋め込みの理論が本質的に用いられる。これについては例えば[1]を参照されたい。本稿に於てもその用語を断わりなしに用いる。

パラメーターについての仮定：以後，パラメーター空間はトーラス的(toroidal)とする。より正確にいえば，Sはあるトーラス埋め込み $\mathcal{X}$ 内の開集合で，S°は$\mathcal{X}$内のトーラス$\mathcal{T}$とSとの交わりと仮定する。広中教授の定理によれば，Sを単項変換して$S-S^\circ$を正規交叉(normal crossing)にできるから，局所的にはいつもトーラス的に変形できるわけで，上記の仮定は妥当なものといえる。

§1. 周期写像，仮定(U).

簡単のため，次の二つの仮定を置こう。

仮定A). $\mathcal{A}^\circ$の偏極は主(principal).

仮定B). 切断 $s_0 : S^\circ \longrightarrow \mathcal{A}^\circ$ がある。

はじめの仮定から自然に周期写像が定義される。すなわち，$\mathfrak{S}_g = \{\tau \in M(g, \mathbb{C}) \,;\, {}^t\tau = \tau,\ \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$ をg次Siegel

上半平面として，$Sp(g, \mathbb{Z})$ を整係数シンプレクティック群としたとき，多価正則写像

$$T : S^{\circ} \longrightarrow \mathfrak{S}_g$$

(周期写像と呼ばれる。)と，準同型

$$\Phi : \pi(S^{\circ}, t_0) \longrightarrow Sp(g, \mathbb{Z})$$

(モノドロミーと呼ばれる。)とがあって，任意の t_0 を基点とする閉じた道 γ に対し，$T(t_0)$ の γ に沿った解析接続 $T(\gamma(t_0))$ は

$$T(\gamma(t_0)) = \Phi([\gamma])\cdot T(t_0)$$

とかける。こゝで $[\gamma]$ は γ のホモトピー類で，又 $Sp(g, \mathbb{Z})$ は良く知られた一次分数変換の形で $\mathfrak{S}_g$ に作用するものとする。(詳しくは[10]参照.)

こゝで大切なことは，上野氏による次の注意である。

<u>命題.</u>　仮定 B) のもとで，$\mathcal{W}^{\circ}$ は T と Φ とから(偏極をこめて)再構成される。

これはさらに具体的に書けるが，少し面倒なので，次の仮定を置いたのちに行う。

さて，我々はこゝでもう一つの重要な仮定を置く。その仮定を述べるために少しく記号を定義する必要がある。

g 次実対称行列のなすベクトル空間を $\mathcal{Y}_g$，正定値実行列のなす開錐を $\mathcal{Y}_g^{+}$ で表わす。又，g 次整対称行列の格子を

Y_g, 非負整対称行列のつくる集合を $\overline{Y_g^+}$ とする。後者の $\mathcal{Y}_g$ 内での閉凸包は $\mathcal{Y}_g^+$ をふくみ，その位相的閉包内の錐 $\overline{\mathcal{Y}_g^+}$ となる。これを算術的閉包と呼ぶ。$\overline{\mathcal{Y}_g^+}$ の元 y は，ある $GL(g,\mathbb{Z})$ の元 u によって $uy{}^tu=\begin{pmatrix}0&0\\0&y'\end{pmatrix}$, $y'>0$, とかけるという性質によって特徴づけられる。一方トーラス埋め込み内の代数的トーラス $\mathcal{T}(=(\mathbb{C}^*)^n)$ の座標を $(w_1,\dots,w_n)$ で表わしておく。トーラス埋め込み $\mathcal{X}$ は $N_\mathbb{R}=\mathrm{Hom}_{alg.\,group}(\mathbb{C}^*,\mathcal{T})\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{R}$ 内の部分的有理多面錐分解 (rational partial polyhedral decomposition) $\Sigma=\{\sigma\}$ によって定まっているものとする。

仮定(U). $\mathbb{Z}$ 線型写像

$$B : N \longrightarrow Y_g$$

があって，$B_\mathbb{R}=B\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{R} : N_\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{Y}_g$ は次の諸性質をみたす。

i) $B_\mathbb{R}(\sigma)\subset\overline{\mathcal{Y}_g^+}$, $\sigma\in\Sigma$;

ii) $B_\mathbb{R}(\sigma^\circ)\subset\mathcal{Y}_g^+$, $\sigma\in\Sigma$ かつ $\dim\sigma=n$;

iii) $S^\circ=S\cap\mathcal{T}$ 上

$$T(w)=B_\mathbb{C}\left(\frac{\log w_1}{2\pi\sqrt{-1}},\dots,\frac{\log w_n}{2\pi\sqrt{-1}}\right)+S(w),$$

ここで，$B_\mathbb{C}=B\otimes\mathbb{C}$ かつ $S(w)$ は S° 一価有界。//

(U) は unipotent の頭文字で，モノドロミーが冪単であるとの意である。上の 3 条件 ii) は便宜上であって，実はさらに弱められる。条件 iii) が本質的であって，それは一見強そうにみえるが，良く知られた，モノドロミーの quasi-unipotentness 定理によって，有限分岐被覆をとり直すことによって実は任意の族を上の形に変形することができる。(ただし ii) を弱めた形で。) その事実を用いて，仮定 (U) をみたす族の結果から，一般の族の場合を取り扱うことも可能であるが煩瑣になるのでこゝではふれない。

仮定 (U) のもとで，次の命題にいう周期写像による族 $\mathcal{A}^\circ$ の再構成を具体的にみておこう。X を階数 g の格子とし，基底を一つとって $\mathbb{Z}^g$ と同一視する。$\mathcal{C}_g$ を g 次元代数的トーラス ($\simeq (\mathbb{C}^*)^g$) として，$S^\circ \times \mathcal{C}_g$ 上に X の作用を次のように定義する。$\alpha \in X$ に対し，

$$T_\alpha : S^\circ \times \mathcal{C}_g \longrightarrow S^\circ \times \mathcal{C}_g$$

$$(w,\ u) \longmapsto (w,\ \mathbf{e}(\alpha T(w))\cdot u),$$

ただし，$\mathbf{e}(\zeta_1, \dots, \zeta_g) = (\mathbf{e}(\zeta_1), \dots, \mathbf{e}(\zeta_g))$，$\mathbf{e}(\ ) = \exp(2\pi\sqrt{-1}(\ ))$，$u_1 \cdot u_2$ は $\mathcal{C}_g$ の群としての積，即ち成分ごとに積をとったベクトルとする。すると仮定から，これは $T(w)$ の多価性によらず定義され，且つ作用は固有不連続で固定点がないこと

が分る。しかも作用の仕方から，商 $S^\circ \times \mathcal{C}_g / X$ は S° 上のファイバー空間となり，その意味でこれは $\mathcal{A}^\circ$ と双正則同型になる。さらに前者に偏極が自然に定義されて，それを含めて同型になることも分るのである。

§2. 許容的分解

我々の方法に於ても，特異ファイバーの構成には任意性がある。しかし，それはトーラス埋め込みの理論から自然に導かれる「許容的分解」によって規定される。

以下§1の（仮定(U)を含めた）情況のもとで考へる。§1の記号も断りなしに用いる。

$\mathcal{C}_g$ を g 次元代数的トーラスとし，$L = \mathrm{Hom}_{alg.grp}(\mathbb{G}_m, \mathcal{C}_g)$，$L_{\mathbb{R}} = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とおく。X を階数 g の格子としたとき，X は $N \times L$ に次の様に作用する。$\alpha \in X$ に対し，

$$
\begin{array}{rccc}
T_\alpha : & N \times L & \longrightarrow & N \times L \\
& \cup & & \cup \\
& (a, x) & \longmapsto & (a, x + \alpha B(a))
\end{array}
$$

定義. $N_{\mathbb{R}} \times L_{\mathbb{R}}$ の部分的有理直錐分解 $K = \{k\}$ が次の諸条件を満す時，（周期写像 T に関して）許容的である (admissible) という。

i) $p : N_{\mathbb{R}} \times L_{\mathbb{R}} \longrightarrow N_{\mathbb{R}}$ は部分的有理直錐分解の射

$p: \mathcal{K} \longrightarrow \Sigma$ を導く；

i)' さらに p は同次元的, 即ち任意の $K\in\mathcal{K}$ に対し $p(K)\in\Sigma$;

ii) $\mathcal{K}$ は X の $N_{\mathbb{R}}\times L_{\mathbb{R}}$ への作用で不変である；

iii) 任意の $K\in\mathcal{K}$, $a\in N_{\mathbb{R}}$ に対し, $K\cap p^{-1}(a)\subset \mathrm{Int}\, B_{\mathbb{R}}(a)$;

iv) 任意の $\sigma\in\Sigma$ に対し, σ 上にある $\mathcal{K}$ の錐集合の X による商は有限.

§3. 特異ファイバーの構成.

主定理. $\varpi^0 : \mathcal{A}^0 \longrightarrow S^0$ を仮定 B), (U) をみたす主偏極アーベル多様体の族とする。ϖ^0 の周期写像 T に関して許容的な $N_{\mathbb{R}}\times L_{\mathbb{R}}$ の部分有理直錐分解が与えられゝば, これに対して ϖ^0 を拡張した S 上の g 次元解析空間の族 $\varpi : \mathcal{A}\to S$ を構成することができる。これを $\mathcal{K}$ に伴うトーラス的退化アーベル多様体族と名付ける。

構成された族について次の諸性質が成り立つ。

0) $\mathcal{A}$ は正規かつトーラス的である；

1) $\sigma\in\Sigma$ に対し $\mathcal{K}_\sigma=\{K ; p(K)=\sigma\}$ とすると,

$\mathcal{K}_\sigma \cap p^{-1}(a) = \{K\cap p^{-1}(a),\ K\in\mathcal{K}_\sigma\}$ は $L_{\mathbb{R}}$ の(部分的)多面体分解を与える. こゝに X が作用しているが, σ に対応するトーラス軌道 O_σ に対し, $\mathcal{A}|O_\sigma\cap S \longrightarrow O_\sigma\cap S$ はファイバー束で, そのファイバーの図形（既約成分とその交わり具

合）は $K_\sigma \cap p^{-1}(a)/X$ の双対図形で与えられる；

2) σ を n 次元の錐とすると，O_σ 上のファイバーの既約成分は $\mathcal{C}_g$ の完備化になっている。一般のところではアーベル多様体の代数的トーラスによる拡張（半アーベル多様体）の完備化になっている；

3) $\bigcup_{K \in K_\sigma} K$ が凸ならば ϖ は O_σ 上固有的である；

4) $\bigcup_{K \in K} K$ 上定義された実函数 $f(a,x)$ が次の諸条件をみたすとする。

a) f は $N \times L$ 上整数値.

b) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ に対し $f(\lambda a, \lambda x) = \lambda f(a,x)$.

c) f は局所的に線型 (piecewise linear).

さらにこの f を用いて，上式の分解 K の任意の錐 K は，ある有限個の $L \times N$ 上の整線形形式 $l_1, \dots, l_r$ を用いて，

$$K = \{(a,x) \in N_{\mathbb{R}} \times L_{\mathbb{R}} ;\ f(a,x) = l_i(a,x),\ i = 1, \dots, r\}$$

と表わせるものとするならば，ϖ は，ϖ^0 の偏極を拡張することによって，射影的となる。//

証明の方針は明らかである。即ち，K に対応する $T \times \mathcal{C}_g$ のトーラス埋め込み $\mathcal{B}$ を作る。許容性の条件 i) からトーラス埋め込みの写像 $p : \mathcal{B} \to \mathcal{X}$ があり，i)' からそれは同

次元的である。§1の最後に述べたように，格子 X は $S^\circ\times\mathcal{C}_g$ に作用しているが，それが条件 iii)により $\mathcal{B}\cap\rho^{-1}(S)$ に拡張されることが示される。条件 ii)と併せて，その作用が全体で，固有非連続かつ固定点がないことも示されて，

$$\mathcal{A} = (\mathcal{B}\cap\rho^{-1}(S))/X$$

とおけば所与の結果を得る。ϖ の諸性質は殆んど与えられた条件及びトーラス埋め込みの理論から得られる（[1]参照）が，ただ性質 4) については退化テータ函数についての理論を新たに展開する必要があり，自明ではない。

§4. 諸例

以下に見るように，§0の問題に関連したいくつかの結果は，我々の立場から統一的に解釈しなおすことができる。

A). 解析的ネロン・モデル（[5]）.

次のように記号を定める。

$$\Sigma = \{\sigma_0 = \{0\},\ \sigma_1 = R^+\},\quad \mathcal{X}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{C},\quad \mathcal{O}_{\sigma_1} = \{0\},$$

$$S = \{z \mid |z|<\varepsilon\},\quad S^\circ = \{z \mid 0<|z|<\varepsilon\}.$$

$$\varpi^\circ : \mathcal{A}^\circ \longrightarrow S^\circ.$$

条件（U）は，周期写像が

$$T(z) = \frac{\log z}{2\pi\sqrt{-1}}B + S(z),\qquad B>0,$$

（$\mathcal{S}(z)$ は $\mathcal{S}$ 上正則）とかゝれることに他ならない。

$$K = \{K^0 = \{(0,0)\},\ K_n = \{(a, an);\ a \in \mathbb{R}^+\}_{n\in\mathbb{Z}^g}\}$$

とおけば、これは認容的で、主定理によりえられた族にはさらに群の構造が入って、群多様体の族になる。これを $\mathcal{S}$ 上の解析的ネロンモデルと呼ぶ。O_σ 上のファイバーは $\det B$ 個の E_g の直和である。代数的なネロンモデルと同様の性質をもつことが[5]で示されている。

B) 安定準アーベル多様体（[7]）.

$\overline{\mathcal{Y}_g^+} \times L_{\mathbb{R}}$ 上函数

$$f(y, x) = \min_{\xi\in\mathbb{Z}^g}\{\xi y\,{}^t\xi + 2\xi\,{}^t x\}$$

によって主定理4)に示したやり方で部分的有理直錐分解を定義することができる。（正確にいうと、$f(y, x)$ の定義域は $\overline{\mathcal{Y}_g^+}$ のふち上では $L_{\mathbb{R}}$ 全部でない。[7] 第一章参照）これを混合分解とよぶ。混合分解の $\overline{\mathcal{Y}_g^+}$ への射影は再び部分的有理直錐分解となり、Delony-Voronoi 分解と名付けられる。$\mathcal{T}_g$ を g 次対称行列で各成分が 0 でないもの全体からなる代数的トーラスとすれば、写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}: \mathfrak{H}_g & \longrightarrow & \mathcal{T}_g \\ \cup & & \cup \\ \tau & \longmapsto & Z = (Z_{ij} = \mathbf{e}(\tau_{ij})) \end{array}$$

が定義され，$\mathrm{Im}\,\Theta = \tau_g^\circ$ は τ_g の開集合である。τ_g° 上 Θ の逆写像Tは仮定(U)をみたすことに注意する。$\mathfrak{X}$ をDelony-Voronoi分解に伴う τ_g のトーラス埋め込みとし，$\mathfrak{X}_g^\circ$ を τ_g° の $\mathfrak{X}$ 内での閉包の内点集合とする。すると混合分解KはTに関して認容的な分解となり，$\mathfrak{X}_g^\circ$ 上にKに伴うトーラス的退化アーベル多様体の族

$$\varpi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{X}_g^\circ$$

が構成される。このファイバーを安定準アーベル多様体とよぶ。非常に著しい性質は，定義と，定理から ϖ が射影的であることと，又はこの族を用いて安定曲線の理論のアーベル多様体における類似がえられることである。即ち，Mumford氏達の理論によれば，Delony-Voronoi分解を用いて主偏極アーベル多様体のモジュライ多様体 $\mathfrak{A}_g^* = Sp(g,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{S}_g$ のコンパクト化 $\tilde{\mathfrak{A}}_g^*$ が構成されるが，自然な全射的正則写像

$$p : \mathfrak{X}_g^\circ \longrightarrow \tilde{\mathfrak{A}}_g^*$$

があって，ϖ のファイバー（つまり，安定準アーベル多様体）の偏極をふくめた構造はpによる像によってのみ定まるので，$\tilde{\mathfrak{A}}_g^*$ の各点にはふるまでこめて，g次元偏極多様体を対応させることができる。ただし $\tilde{\mathfrak{A}}_g^*$ がちょうど偏極安定準アーベル多様体の粗モジュライ多様体であるのかどうか（つ

より、相異なる点に対応するものは同型でないかどうか）は $g \leq 3$ でしか肯定的に解かれていない（[4]）。

しかも、種数 g の安定曲線のモジュライ多様体 $\mathcal{S}_g$ とは次のような自然な関係がある。種数 g の非特異曲線のモジュライスを $\mathcal{M}_g$ とすると、曲線にヤコビ多様体を対応させることにより、自然な単射

$$\iota : \mathcal{M}_g \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}_g^*$$

がえられる（Torelliの定理）。この単射は正則写像

$$j : \mathcal{S}_g \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}_g^*$$

に拡張される。$g=2$ のとき j は同型であり、$g \geq 3$ では j は単射ではないが、既約安定曲線に対応する開部分集合に制限すれば単射である（[6]）。さらに安定曲線から安定半アーベル多様体への自然な正則写像も存在することが示される。

C). 安定曲線の一般ヤコビ多様体のコンパクト化（[9]）。

安定曲線の一般ヤコビ多様体を、安定曲線に伴うグラフを用いていろいろの仕方で完備化することができる。種々の概念が必要なので、ここでは詳しく述べないが、小田-Seshadriによる方法を複素解析的に我々の圏でとりあつかうと、パラメーターをもった場合、即ち安定曲線の局所一般変形空間上で一般ヤコビ多様体の族の完備化を論ずることができる。

References

[1] G. Kempf et al.: Toroidal embeddings, I, Lecture Notes in Math., 339, Springer, Berlin, 1973.

[2] K. Kodaira,: On compact analytic surfaces, II-III, Ann. of Math., 77-78 (1963), 563-626;1-40.

[3] D. Mumford: An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings, Compositio Math., 24 (1972), 239-272.

[4] I. Nakamura: On moduli of stable quasi-abelian varieties, Nagoya Math. J., 58 (1975), 149-214.

[5] I. Nakamura: Properification of Neron model and its application, to appear in Kodaira volume.

[6] Y. Namikawa: On the canonical holomorphic map from the moduli space of stable curves to the Igusa monoidal transform, Nagoya Math. J., 52 (1973), 197-259.

[7] Y. Namikawa: A new compactification of the Siegel space and the degeneration of abelian vorieties, to appear in Math. Ann.

[8] Y. Namikawa: Toroidal degeneration of abelian vorieties, to appear in Kodaira volume.

[9] T. Oda - C. S. Seshadri: Compactifications of the generalized Jacobian variety, to appear.

[10] K. Ueno: On fibre spaces of normally polarized abelian varieties of dimension 2, I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 18 (1971), 37-95; II, ibid., 19 (1972), 163-199.